

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**  
**Проректор по учебной работе**

**А.А. Воронов**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Введение в математический анализ
<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Управление инновациями в бизнесе Физтех-школа бизнеса высоких технологий кафедра высшей математики
<b>курс:</b>	1
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 120 всего, в том числе:

лекции: 60 час.

семинары: 60 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 120 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 270, всего зач. ед.: 6

Количество контрольных работ, заданий: 3

Программу составили:

О.В. Бесов, д-р физ.-мат. наук, профессор  
Б.И. Голубов, д-р физ.-мат. наук, профессор  
Р.Н. Карасёв, д-р физ.-мат. наук, доцент  
В.Ж. Сакбаев, д-р физ.-мат. наук, доцент  
А.Ю. Петрович, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры высшей математики 21.04.2022

## Аннотация

В курсе "Введение в математический анализ" изучаются основополагающие понятия математического анализа функций одной переменной такие, как предел последовательности, предел функции в точке и непрерывность функции в точке.

Основным утверждением теории действительного числа является теорема о существовании точной верхней (нижней) грани ограниченного множества.

Изучаются свойства сходящихся числовых последовательностей и последовательностей, имеющих предел. Раздел заканчивается изучением критерия Коши сходимости числовой последовательности.

Исследуются свойства функций, имеющих предел в точке, непрерывных в точке и непрерывных на отрезке.

Изучаются свойства функций, имеющих в точке производную (дифференцируемые в точке функции) и производные высших порядков. В частности, изучаются формулы Тейлора с остаточными членами в форме Лагранжа и Пеано. Эти сведения применяются к исследованию функций и к изучению векторных функций (элементы дифференциальной геометрии).

Изучается интегральное исчисление — неопределенный интеграл.

## 1. Цели и задачи

### Цель дисциплины

- формирование базовых знаний по математическому анализу для дальнейшего использования в других областях математического знания и дисциплинах с естественнонаучным содержанием;
- формирование математической культуры, исследовательских навыков и способности применять знания на практике.

### Задачи дисциплины

- приобретение слушателями теоретических знаний и практических умений и навыков в области теории пределов, дифференциального и интегрального исчисления, теории рядов;
- подготовка слушателей к изучению смежных математических дисциплин;
- приобретение навыков в применении методов математического анализа в физике и других естественнонаучных дисциплинах.

## 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
УК-6 Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК-6.2 Способен планировать самостоятельную деятельность в решении профессиональных задач; подвергать критическому анализу проделанную работу; находить и творчески использовать имеющийся опыт в соответствии с задачами саморазвития
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- основные свойства пределов последовательностей и функций действительного переменного, производной, дифференциала, неопределенного интеграла; свойства функций, непрерывных на отрезке;
- основные «замечательные пределы», табличные формулы для производных и неопределенных интегралов, формулы дифференцирования, основные разложения элементарных функций по формуле Тейлора;
- основные формулы дифференциальной геометрии.

уметь:

- записывать высказывания при помощи логических символов;
- вычислять пределы последовательностей и функций действительного переменного;
- вычислять производные элементарных функций, раскладывать элементарные функции по формуле Тейлора; вычислять пределы функций с применением формулы Тейлора и правила Лопиталя;
- строить графики функций с применением первой и второй производных; исследовать функции на локальный экстремум, а также находить их наибольшее и наименьшее значения на промежутках;
- вычислять кривизну плоских и пространственных кривых.

владеть:

- предметным языком классического математического анализа, применяемым при построении теории пределов;
- аппаратом теории пределов, дифференциального и интегрального исчисления для решения различных задач, возникающих в физике, технике, экономике и других прикладных дисциплинах.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Действительные числа	6			8
2	Пределы последовательностей	14	18		32
3	Предел и непрерывность функций одной переменной	14	18		32
4	Производная и ее применение	18	20		24
5	Дифференциальная геометрия	6	2		14
6	Комплексные числа	2	2		10
Итого часов		60	60		120
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		270 час., 6 зач.ед.			

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 1 (Осенний)

##### 1. Действительные числа

1.1. Действительные числа. Отношения неравенства между действительными числами. Свойство Архимеда. Плотность множества действительных чисел. Теорема о существовании и единственности точной верхней (нижней) грани числового множества, ограниченного сверху (снизу). Арифметические операции с действительными числами. Счетность множества рациональных чисел, несчетность множества действительных чисел.

## 2. Пределы последовательностей

2.1. Предел числовой последовательности. Теорема Кантора о вложенных отрезках. Единственность предела. Бесконечно малые последовательности и их свойства. Свойства пределов, связанные с неравенствами. Арифметические операции со сходящимися последовательностями. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности. Число  $\varepsilon$ . Бесконечно большие последовательности и их свойства.

2.2. Подпоследовательности, частичные пределы. Верхний и нижний пределы числовой последовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Критерий Коши сходимости последовательности.

## 3. Предел и непрерывность функций одной переменной

3.1. Предел числовой функции одной переменной. Определения по Гейне и по Коши, их эквивалентность. Свойства пределов функции. Различные типы пределов. Критерий Коши существования конечного предела функции. Теорема о замене переменной под знаком предела. Существование односторонних пределов у монотонной функции.

3.2. Непрерывность функции в точке. Свойства непрерывных функций. Односторонняя непрерывность. Теорема о переходе к пределу под знаком непрерывной функции. Непрерывность сложной функции. Точки разрыва, их классификация. Разрывы монотонных функций.

3.3. Свойства функций, непрерывных на отрезке – ограниченность, достижение точных верхней и нижней граней. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции. Теорема об обратной функции.

3.4. Непрерывность элементарных функций. Определение показательной функции. Свойства показательной функции. Замечательные пределы, следствия из них.

3.5. Сравнение величин (символы  $o$ ,  $O$ ,  $\sim$ ). Вычисление пределов при помощи выделения главной части в числителе и знаменателе дроби.

## 4. Производная и ее применение

4.1. Производная функции одной переменной. Односторонние производные. Непрерывность функции, имеющей производную. Дифференцируемость функции в точке, Дифференциал. Геометрический смысл производной и дифференциала. Производная суммы, произведения и частного двух функций. Производная сложной функции. Производная обратной функции. Производные элементарных функций. Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменной.

4.2. Производные высших порядков. Формула Лейбница для  $n$ -й производной произведения. Дифференциал второго порядка. Отсутствие инвариантности его формы относительно замены переменной. Дифференциалы высших порядков.

4.3. Теорема Ферма (необходимое условие локального экстремума). Теоремы о среднем Ролля, Лагранжа, Коши. Формула Тейлора с остаточным членом в формах Пеано и Лагранжа. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида  $0/0$ . Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида  $\infty/\infty$ .

4.4. Применение производной к исследованию функций. Достаточные условия монотонности, достаточные условия локального экстремума в терминах первой и второй производной. Выпуклость, точки перегиба. Достаточные условия локального экстремума в терминах высших производных. Построение графиков функций – асимптоты, исследование интервалов монотонности и точек локального экстремума, интервалов выпуклости и точек перегиба.

## 5. Дифференциальная геометрия

6.1. Элементы дифференциальной геометрии. Кривые на плоскости и в пространстве. Гладкие кривые, касательная к гладкой кривой. Теорема Лагранжа для вектор-функций. Длина кривой. Производная переменной длины дуги. Натуральный параметр. Кривизна кривой, формулы для ее вычисления. Сопровождающий трехгранник пространственной кривой.

## 6. Комплексные числа

7.1. Комплексные числа. Модуль и аргумент, Тригонометрическая форма. Арифметические операции с комплексными числами. Извлечение корня. Экспонента и логарифм от комплексного числа. Формула Эйлера. Информация об основной теореме алгебры. Разложение многочлена с комплексными коэффициентами на линейные множители. Разложение многочлена с действительными коэффициентами на линейные и неприводимые квадратичные множители. Разложение правильной дроби в сумму простейших дробей.

## 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная мультимедиа проектором, экраном и микрофоном.

## 6. Перечень рекомендуемой литературы

### Основная литература

1. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии [Текст] : учебник для вузов / А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко .— М. : Физматлит, 2004 .— 304 с.
2. Курс математического анализа [Текст] : учебник для вузов / С. М. Никольский .— 6-е изд., стереотип. — М. : Физматлит, 2001 .— 592 с.
3. Лекции по математическому анализу [Текст] : в 2 ч. : учеб. пособие для вузов. Ч. 1 / Г. Е. Иванов ; М-во образования и науки РФ, МФТИ .— 2-е изд., испр. — М. : Изд-во МФТИ, 2004 .— 359 с.
4. Курс математического анализа [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин .— 5-е изд. — М. : БИНОМ. Лаб. знаний, 2013 .— 672 с.
5. Сборник задач по математическому анализу [Текст] : в 3 т. Т. 1 : Предел. Непрерывность. Дифференцируемость / Л. Д. Кудрявцев [и др.] .— 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Физматлит, 2010, 2012 .— 496 с.
6. Сборник задач по математическому анализу [Текст] : в 3 т. Т. 2 : Интегралы. Ряды : учеб. пособие для вузов / Л. Д. Кудрявцев [и др.] .— 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Физматлит, 2003, 2009, 2012 .— 504 с.
7. Лекции по математическому анализу [Текст] / О. В. Бесов - М. Физматлит, 2016
8. Лекции по математическому анализу [Текст] : в 3 ч. Ч. 1 : учеб. пособие для вузов. Введение в математический анализ / А. Ю. Петрович ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М. : МФТИ, 2012 .— 275 с.
9. Сборник задач по математическому анализу [Текст]. Т. 3 / Л. Д. Кудрявцев [и др.] i Функции нескольких переменных, учеб. пособие для вузов. -М., ФИЗМАТЛИТ, 2018

### Дополнительная литература

1. Краткий курс математического анализа [Текст] : учебник для вузов / Л. Д. Кудрявцев .— 3-е изд., перераб. — М. : Физматлит, 2002 ,2003, 2005 .— Т. 2 : Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. Гармонический анализ. - 2002. - 424 с.
2. Лекции по математическому анализу [Текст] : [в 2 ч.] : учеб. пособие для вузов. Ч. 1 / Г. Н. Яковлев .— 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Физматлит, 2004 .— 340 с.
3. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. Т. 1 : учебник для вузов : рек. М-вом образования Рос. Федерации / Г. М. Фихтенгольц ; пред. и прим. А. А. Флоринского .— 8-е изд. / .— М. : Физматлит, 2001, 2003, 2006, 2007 .— 680 с.

## 7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

**8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

**9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Приведены в ежегодно разрабатываемых домашних заданиях.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Управление инновациями в бизнесе Физтех-школа бизнеса высоких технологий кафедра высшей математики
<b>курс:</b>	<u>1</u>
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен

**Разработчики:**

О.В. Бесов, д-р физ.-мат. наук, профессор  
Б.И. Голубов, д-р физ.-мат. наук, профессор  
Р.Н. Карасёв, д-р физ.-мат. наук, доцент  
В.Ж. Сакбаев, д-р физ.-мат. наук, доцент  
А.Ю. Петрович, канд. физ.-мат. наук, доцент

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
УК-6 Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК-6.2 Способен планировать самостоятельную деятельность в решении профессиональных задач; подвергать критическому анализу проделанную работу; находить и творчески использовать имеющийся опыт в соответствии с задачами саморазвития
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Введение в математический анализ» обучающийся должен:

### знать:

- основные свойства пределов последовательностей и функций действительного переменного, производной, дифференциала, неопределенного интеграла; свойства функций, непрерывных на отрезке;
- основные «замечательные пределы», табличные формулы для производных и неопределенных интегралов, формулы дифференцирования, основные разложения элементарных функций по формуле Тейлора;
- основные формулы дифференциальной геометрии.

### уметь:

- записывать высказывания при помощи логических символов;
- вычислять пределы последовательностей и функций действительного переменного;
- вычислять производные элементарных функций, раскладывать элементарные функции по формуле Тейлора; вычислять пределы функций с применением формулы Тейлора и правила Лопиталя;
- строить графики функций с применением первой и второй производных; исследовать функции на локальный экстремум, а также находить их наибольшее и наименьшее значения на промежутках;
- вычислять кривизну плоских и пространственных кривых.

### владеть:

- предметным языком классического математического анализа, применяемым при построении теории пределов;
- аппаратом теории пределов, дифференциального и интегрального исчисления для решения различных задач, возникающих в физике, технике, экономике и других прикладных дисциплинах.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю



Текущий контроль осуществляется на основе балльно-рейтинговой системы (БРС) оценки знаний по изучаемой дисциплине. БРС учитывает выполнение студентами совокупности домашних заданий и контрольных работ в соответствии с учебным планом. Данные о посещаемости и текущей успеваемости вносятся преподавателями в специальные журналы, отражаются в электронной системе контроля и учитываются в БРС.

Текущий контроль на основе домашних заданий осуществляется в течении учебного семестра в сроки, установленные Учебным управлением, в соответствии с учебным планом.

Для сдачи задания студент обязан предоставить решение задачи домашнего задания в письменной форме, ответить на вопросы преподавателя и написать контрольную работу по заданию, по которой проверяются знание понятий и утверждений по темам сдаваемого задания и умению решать задачи.

Во время выполнения контрольной работы нельзя пользоваться помощью других лиц, вычислительной техники и мобильными телефонами.

\*Прикрепляется БРС по изучаемому предмету.

#### **4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся**

##### **Критерии оценивания**

Оценка «отлично (10)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;

оценка «отлично (9)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые были самостоятельно обнаружены и исправлены;

оценка «отлично (8)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые после указания экзаменатора были самостоятельно исправлены;

оценка «хорошо (7)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает неточности в ответе или делает несущественные ошибки при решении задач;

оценка «хорошо (6)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает небольшие ошибки в ответе и (или) при решении задач;

оценка «хорошо (5)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но отвечает неуверенно и (или) допускает ошибки при решении задач;

оценка «удовлетворительно (4)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, если при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «удовлетворительно (3)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, не владеющему некоторыми разделами учебной программы, но умеющему применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется обучающемуся, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;

оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется обучающемуся, показавшему полное незнание учебной программы дисциплины.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Время проведения письменного экзамена составляет 4 астрономических часа.

При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется 1 астрономический час на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном экзамене не должен превышать 2 астрономических часов.

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться только программой дисциплины.

## Балльно-рейтинговая система оценки знаний

Дисциплина: «Введение в математический анализ», 1 курс, 1 семестр, экзамен

Кафедра: высшей математики

№	Виды занятий	Сумма баллов
1.	Коллоквиум	0 — 7
2.	Семестровая работа	0 — 7
3.	Контрольная работа по 3 заданию	0 — 4
4.	Задание № 1	0 — 2
5.	Задание № 2	0 — 2
6.	Задание № 3	0 — 2
7.	Проверка теоретических знаний	0 — 3
8.	Работа на семинарах	0 — 3
9.	Письменная экзаменационная работа	0 — 30
10.	Итоговый контроль. Экзамен (устный ответ)	0 — 60
	<b>ИТОГО</b>	<b>0 — 120</b>

**Результативная работа на практикуме 0 — 3 балла.** Если при учете этого вида работы итоговая сумма за работу в семестре превосходит 30 баллов, то считать ее равной 30 баллам.

Сумма баллов за устный ответ начисляется по формуле  $N \cdot 6$ , где  $N > 2$  — предварительная оценка за устный ответ по десятибалльной шкале. Если  $N = 1, 2$ , то итоговая оценка совпадает с  $N$ .

Соответствие оценок итоговой академической успеваемости балльно-рейтинговой системе.

Баллы БРС	Оценки	
112 — 120	10	отлично
103 — 111	9	
94 — 102	8	
85 — 93	7	хорошо
76 — 84	6	
67 — 75	5	
54 — 66	4	удовлетворительно
41 — 53	3	
27 — 40	2	неудовлетворительно
0 — 26	1	

Регламент принятия домашних заданий и проведения экзамена определяется «Положением о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации студентов на кафедре высшей математики».

Задания по дисциплине «Введение в математический анализ»

1. Найдите  $y'_x, y''_{xx}$ , если  $x(t) = \frac{t^2}{e^t}, y(t) = \frac{1}{te^t}, 0 < t < 1$ .

2. Является ли последовательность, заданная рекуррентно

$$x_1 = 0, x_{n+1} = \sqrt{4 + 3x_n}, n \in \mathbb{N},$$

монотонной? Ограниченной? Найдите предел последовательности.

3. Найдите все асимптоты графика функции  $f(x) = \frac{\sqrt{9x^4+1}}{|x|}$ .

4. Определите, производными какого порядка обладает в точке  $x = 0$  функция

$$f(x) = \begin{cases} 2x \cos x, & x < 0, \\ \sin 2x, & x \geq 0. \end{cases}$$

Вычислите в этой точке все существующие производные.

5. Напишите уравнения касательной и нормали к графику функции

$$y = \frac{x}{1 + 2x^2}$$

в точке с абсциссой  $x = 1$ .

6. Найдите производную порядка  $n$  функции  $f(x) = x \ln x$ .

7. Найдите второй дифференциал функции  $y = \cos(x^2)$ , считая  $x$

а) независимой переменной,

б) функцией некоторой независимой переменной.

8. Представьте формулой Маклорена с  $o(x^n)$  функцию  $f(x) = (x + 1)e^{2x}$ .

9. Представьте формулой Маклорена функцию  $f(x) = x^2|x| + \sin x$  с  $o(x^n)$  (число  $n$  выберите наибольшим).

10. Найдите предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{e^x-1} + \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{12}\right) - 1}{x^3}$ .

11. Найдите предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg(\arcsin 2x) - th(\sin 2x)}{x^3}$ .

12. Найдите предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x^2}{sh x^2} \right)^{\frac{1}{x^4}}$ .

13. Найдите предел  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^4)^{\frac{1}{\ln(1+x^2+x^4)-tgx^2}}$ .
14. Найдите экстремумы функции  $y = (x^2 - 3)e^x$ .
15. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $y = xe^{|x|}$  на отрезке  $[-1; 1]$ .
16. Найдите точки перегиба графика функции  $y = e^{1/x}$ .
17. Для вектор-функции  $r(t) = \begin{pmatrix} cht \\ sht \\ t \end{pmatrix}$  вычислите  $|\vec{r}'|$ ,  $|\vec{r}' \times \vec{r}''|$  и кривизну соответствующей кривой в точке  $t = 0$ .

#### Ключи к заданиям

- $y'_x = \frac{t+1}{t^3(t-2)}, y''_{xx} = \frac{3(t^2-2)e^t}{t^5(t-2)^3}$ .
- Последовательность является монотонной. Последовательность является ограниченной. Предел равен 4.
- $x = 0, y = 3x$  при  $x \rightarrow +\infty, y = -3x$  при  $x \rightarrow -\infty$ .
- Первого и второго порядка.  $f'(0) = 2, f''(0) = 0, f'''(0)$  не существует.
- Уравнение касательной:  $y = -\frac{1}{9}x + \frac{4}{9}$ ; уравнение нормали:  $y = 9x - \frac{26}{3}$ .
- $(f(x))^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^{n-1}} + n \cdot \frac{(-1)^n(n-2)!}{x^{n-1}}$ .
- а)  $d^2y = (-2 \sin(x^2) - 4x^2 \cos(x^2))dx^2$ ,  
б)  $d^2y = (-2 \sin(x^2) - 4x^2 \cos(x^2))dx^2 - 2x \sin(x^2)d^2x$ .
- Варианты записи ответа:  

$$f(x) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{2^{k-1}}{k!} (k+2)x^k + o(x^n), x \rightarrow 0;$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{2^{k-1}}{k!} (k+2)x^k + o(x^n), x \rightarrow 0.$$
- $f(x) = x + o(x^2), x \rightarrow 0$ .
- $-\frac{1}{48}$ .

11. 8.

12.  $e^{-1/3}$ .

13.  $e^2$ .

14.  $y_{max} = y(-3) = \frac{6}{e^3}; y_{min} = y(1) = -2e$ .

15.  $y_{\text{наиб}} = y(1) = e; y_{\text{наим}} = y(-1) = -e$ .

16.  $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{e^2}\right)$ .

17.  $|\vec{r}'| = \sqrt{2}, |\vec{r}' \times \vec{r}''| = \sqrt{2}, k = \frac{1}{2}$ .